Técnicas de contar

MATEMÁTICA DISCRETA I

F. Informática. UPM

Cardinal de un conjunto

Contar los elementos de un conjunto A es establecer una biyección entre A y un conjunto finito $\{1, \ldots, n\}$.

Definición

Diremos que el cardinal de un conjunto A es n si se puede establecer una biyección $f : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow A$. Se denota $|A| = n$. Se define $|\emptyset| = 0$.
Se dice que $A \neq \emptyset$ es infinito si no existe ninguna biyección $f : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow A$ para ningún $n \in \mathbb{N}$.

Teorema (Principio de la unión)

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos disjuntos dos a dos se tiene que

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Ejemplo. El número de palabras del diccionario es igual al número de palabras que empiezan por a más el número de palabras que empiezan por b más ... más el número de palabras que empiezan por z.

Principios básicos

Teorema (Principio del complementario)

Si B es un conjunto finito y A es un subconjunto de B se tiene que

$$|B \setminus A| = |B| - |A|.$$

Teorema (Principio del producto)

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos no vacíos se tiene que

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

Ejemplo. El número de palabras posibles de cuatro letras formadas solo por vocales es $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.

Principios básicos

Teorema (Principio de inclusión-exclusión)

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos se tiene que

i) $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$,

ii) $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \sum_{i=1}^{3} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$,

iii) $|\cup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-i)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n|$.

Ejemplo. El número de palabras del diccionario que empiezan o terminan por a el número de palabras que empiezan por a más el número de palabras que terminan por a menos el número de palabras que empiezan y terminan por a.

Principios básicos

Teorema (Principio de las cajas o de distribución)

Si se reparten n objetos en m cajas y $n > m$, entonces alguna caja recibe más de un elemento.

Teorema

Si n objetos se distribuyen en m cajas y $n > mp$, entonces alguna caja recibe más de p elementos.

Ejemplo. Dada una palabra de 28 letras alguna de éstas habrá de estar necesariamente repetida.

Teorema (Principio de las cajas generalizado)

Si n objetos se distribuyen en m cajas, entonces alguna caja recibe al menos $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ elementos y alguna caja recibe a lo sumo $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ elementos, donde $\lceil x \rceil$ es el menor entero mayor o igual que x y $\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero menor o igual que x.

Variaciones

Definición

Llamaremos variación de m elementos tomados de n en n $(n < m)$ a cada una de las selecciones ordenadas de n objetos distintos, tomados de un conjunto de m objetos.

Observación

Una variación de m elementos tomados de n en n $(n < m)$ es una aplicación inyectiva $f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

Teorema

El número de variaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n es $V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$.

Ejemplo. El número de palabras distintas de cuatro letras, todas ellas distintas, que pueden formarse con las letras del abecedario es $27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24$.

Permutaciones

Definición

Llamaremos permutación de n elementos a cada una de las variaciones de n elementos tomados de n en n.

Observación

Una permutación de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es una aplicación biyectiva

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Teorema

El número de permutaciones de n elementos es $P_n = n!$.

Ejemplo. El número de palabras distintas que pueden formarse con las letras de ALTO es $4!$.

Observación

El número de permutaciones circulares de n elementos es $n - 1!$.

Combinaciones

Definición

Llamaremos combinación de m elementos tomados de n en n a cada una de las selecciones, no ordenadas y sin repeticiones, de n objetos, tomados de un conjunto de m objetos.

Teorema

El número de combinaciones de m elementos tomados de n en n es igual a

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Ejemplo. El número de subconjuntos de 4 elementos de un conjunto de 27 elementos es $C_{27,4} = \dfrac{27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24}{4!}$.

Números combinatorios

Definición

Se llama número combinatorio n sobre k al número de combinaciones de m elementos tomados de n en n. Se denota $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Se define $\binom{n}{0} = 1$. Obsérvese que $\binom{n}{n} = 1$.

Propiedades

i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

ii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$,

iii) $(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$ (Teorema del binomio),

iv) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

El triángulo de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Variaciones con repetición

Definición

Llamaremos variación con repetición de m elementos tomados de n en n a cada una de las selecciones ordenadas de n objetos, tomados de un conjunto de m objetos.

Observación

Una variación con repetición de m elementos tomados de n en n es una aplicación $f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

Teorema

El número de variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n es $VR_{m,n} = m^n$.

Ejemplo. El número de palabras distintas de cuatro letras que pueden formarse con las letras del abecedario es $27 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 27$.

Permutaciones con repetición

Definición

Llamaremos permutación con repetición de $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ elementos en la que cada elemento a_i se repite n_i veces, a cada uno de los distintos grupos ordenados que con ellos se puede formar.

Teorema

El número de permutaciones con repetición de $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ *elementos es* $PR_n^{n_1,\ldots,n_k} = \dfrac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$.

Ejemplo. El número de palabras distintas que pueden formarse con las letras de la palabra ABECEDARIO es $\frac{4!}{2 \cdot 2}$.

Números multinómicos

Observación

A los números $\binom{n}{k_1, \ldots, k_m} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$ se les llama números multinómicos. Se tiene que

i) $\binom{n}{k_1, \ldots, k_n} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\cdots\binom{k_n}{k_n}$,

ii) $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_m^{k_m}$

(Teorema del multinomio).

Combinaciones con repetición

Definición

Llamaremos combinación con repetición de m elementos tomados de n en n a cada una de las selecciones, no ordenadas, de n objetos, tomados de un conjunto de m objetos.

Observación

El número de combinaciones con repetición de m elementos tomados de n es $CR_{m,n} = C_{m+n-1,n} = \dfrac{m+n-1!}{n!(m-1)!}$.
Si necesariamente se elige al menos un elemento de cada tipo el resultado es $CR_{m,n-m} = C_{n-1,n-m} = \dfrac{n-1!}{(n-m)!(m-1)!}$.

Ejemplo. El número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$ es $CR_{4,32}$. El número de soluciones enteras mayores o iguales que uno es $CR_{4,28}$. El número de soluciones enteras no negativas menores o iguales que 9 es $CR_{4,32} - 4CR_{4,22} + \frac{4\cdot 3}{2}CR_{4,12} - \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2}CR_{4,2}$.

Cuadro resumen

Selecciones	Ordenadas	No ordenadas
Sin repetición	$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
Con repetición	n^k	$\binom{n-1+k}{k}$

Desórdenes

Definición

Llamaremos desorden o desarreglo a una permutación $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma(i) \neq i$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Teorema

El número de desórdenes de n elementos es

$$\begin{aligned} d_n &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)! \\ &= n! - n! + \frac{n!}{2} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ &= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \end{aligned}$$

Particiones

Definición

Llamaremos número de Stirling de segunda clase $S(n,k)$ al número de particiones de un conjunto X con n elementos, en k subconjuntos no vacíos.

Propiedades

i) $S(n,1)=1$, **ii)** $S(n,n)=1$, **iii)** $S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k)$.

Observación

El número de aplicaciones suprayectivas de un conjunto de m elementos en un conjunto de n elementos es

$$T(m,n)=n^m-n(n-1)^m+\binom{n}{2}(n-2)^m-\binom{n}{3}(n-3)^m+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1^m.$$

Teorema

$$S(m,n)=\frac{T(m,n)}{n!}.$$

Cuadro resumen: Selecciones y distribuciones

Selecciones de m elementos tomados de n en n		Distribuciones de n objetos en m cajas
ordenadas sin repetición	$m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$	n objetos distintos (máx. 1 por caja)
no ordenadas sin repetición	$\binom{m}{n}$	n objetos idénticos (máx. 1 por caja)
ordenadas con repetición	m^n	n objetos distintos
no ordenadas con repetición	$\binom{m-1+n}{n}$	n objetos idénticos
	$T(n,m)$	n objetos distintos (cajas no vacías)
	$\binom{n-1}{m-n}$	n objetos idénticos (cajas no vacías)